УДК 004
DOI https://doi.org/10.32838/2663-5941/2021.6/12

Завгородній В.В.
Державний університет інфраструктури та технологій

Завгородня Г.А.
Державний університет інфраструктури та технологій

Дроботович К.Є.
Державний університет інфраструктури та технологій

Тенігін О.В.
Державний університет інфраструктури та технологій

Шматко М.М.
Державний університет інфраструктури та технологій

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У МЕТОДАХ ФОРМАЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі розглянуті дослідження методів прийняття управлінських рішень в умовах конфлікту, заснованого на використанні методів теорії ігор. Для таких ситуацій якість та кількість наявної інформації про об'єкт управління та зовнішнє середовище визначають, яким чином може бути формалізоване та вирішене завдання прийняття рішення.

Метою побудови такої формалізованої моделі є вироблення рекомендацій для розумної поведінки гравців в ігрових ситуаціях, тобто визначення оптимальної стратегії кожного з гравців.

У роботі проведено математичний аналіз ігрових ситуацій та формалізовано їхній опис у вигляді математичної моделі.

Наведено формалізовану схему ігрової ситуації у вигляді її математичної моделі, а також сформульовано ігрову ситуацію, тобто схематизовано її для відображення стратегій учасників та чисельних результатів, до яких приводить кожна комбінація стратегій сторін, що беруть участь.

Формалізований опис поведінки гравців у тій чи іншій ігровій ситуації є ключовим завданням побудови загального рішення гри. В ідеальному випадку таке рішення представляє собою набір рекомендацій для кожного гравця, проте так буває далеко не завжди. У таких випадках рішення може бути представлене у вигляді набору результатів гри. Тобто рішення є набором раціональних, з точки зору поведінки гравців, ситуацій і тому повинні реалізовуватися лише ті ситуації, що належать рішенню. Водночас, якщо використання прямих стратегій не дає можливості знайти рішення гри, можуть складатися також і змішані стратегії.

Цінність модельних досліджень ігрових ситуацій безперечна, оскільки вони дають можливість, досліджуючи досить прості моделі, з'ясовувати основні закономірності, які лежать в основі раціональної поведінки в ситуаціях, що моделюються.

Ключові слова: *теорія ігор, формалізована модель, ігрова стратегія, дерево гри, прийняття рішень.*

Постановка проблеми. Прийняття управлінських рішень в умовах конфлікту вимагає спеціального дослідження, заснованого на використанні методів теорії ігор [1–3]. Для таких ситуацій якість та кількість наявної інформації про об'єкт управління та зовнішнє середовище визначають, яким чином може бути формалізоване та вирішене завдання прийняття рішення [4, 5].

Формалізація ситуації у формі гри полягає в описі її основних елементів, до яких належать суб'єкти гри, безліч їхніх стратегій, способи вибору стратегій, інформація, якою володіє кожен гравець під час здійснення такого вибору, виграш кожного гравця за кожного набору вибраних стратегій [6–8]. Доступна гравцям інформація про наміри інших гравців та їхні можливості може суттєво вплинути на рішення, що приймається.

Метою побудови такої формалізованої моделі є вироблення рекомендацій для розумної поведінки гравців в ігрових ситуаціях, тобто визначення оптимальної стратегії кожного з гравців. Оптимальною стратегією гравця називається така стратегія, яка за багаторазового повторення гри забезпечує цьому гравцю максимально можливий середній виграш.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перші математичні аспекти та програми теорії ігор були викладені в класичній книзі Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна [9], напрацювання яких набули подальшого розвитку в роботах Дж. Неша.

Останнім часом методи дослідження операцій знову широко висвітлюються в публікаціях з оптимізації управління, зокрема в публікаціях Alessandro Bonatti [10], Mihai Manea [11], Erich Prisner [12], Muhamet Yildiz [13] та інших вчених.

Сьогодні ігрові моделі настільки різноманітні, що навряд чи можливо дати просте формальне визначення гри, яке включало б усі моделі.

Постановка завдання. Мета дослідження – провести математичний аналіз ігрових ситуацій та формалізувати їхній опис у вигляді математичної моделі.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

- Навести формалізовану схему ігрової ситуації у вигляді її математичної моделі.
- Сформулювати ігрову ситуацію, тобто схематизувати її для відображення стратегій учасників та чисельних результатів, до яких приводить кожна комбінація стратегій сторін, що беруть участь.

Виклад основного матеріалу дослідження. Наведемо формальний опис ігрової ситуації. Позначимо множини стратегій як X та Y. Величини $x \in X$ та $y \in Y$ означають конкретні стратегії першого та другого гравців.

Щоб ввести в гру випадкові ходи, необхідно вважати, що у грі бере участь третій гравець, який робить випадкові ходи. Позначимо через H простір стратегій третього гравця.

Будь-яка стратегія третього гравця $h \in H$, що являє собою конкретну послідовність всіх випадкових ходів, відбуватиметься з імовірністю *p(h)*, яку легко порахувати, знаючи ймовірність кожного випадкового ходу в цій послідовності *p(h)*, являє собою розподіл імовірностей у просторі та задовольняє умові:

$$p(h) \geq 0, \sum_{h \in H} p(h) = 1 \quad (1)$$

Позначимо через q певний варіант гри. Варіант визначено, якщо вибрано стратегії гравців *[x]* та *[y]* та стратегію випадкових ходів h:

$$q = (x, y, z) \quad (2)$$

Результатом є виграш чи програш кожного з гравців.

Розглянемо одну конкретну ситуацію *q(x, y, h)* та позначимо через $L_x(x, y, h)$ та $L_y(x, y, h)$ програш або втрати першого та другого гравців відповідно.

При цьому виграші розглядаємо як від'ємні програші. Загальна сума програшів обох гравців дорівнює:

$$O = L_x(x, y, h) - L_y(x, y, h) \quad (3)$$

Далі розглядаються лише ігри з нульовою сумою, тобто такі ігри, у яких загальна сума програшу (3) дорівнює нулю. У таких іграх програш одного гравця дорівнює виграшу іншого гравця:

$$L_y(x, y, h) = -L_x(x, y, h) = L(x, y, h) \quad (4)$$

Оскільки стратегія h є випадковою, то за вибраних стратегій (x) та (y), а також втрат *L(x, y, h)* вона буде випадковою з розподілом імовірностей *p(h)* на просторі H. Тому оцінити обрані стратегії (x) та (y) можна лише шляхом усереднення втрат *L(x, y, h)* у всьому просторі H, тобто ввівши поняття середніх втрат *L(x, y)*, що визначаються зі співвідношення:

$$L_x(x, y) = \sum L(x, y, h) p(h) \quad (5)$$

Гра буде визначена, якщо перераховані всі можливі стратегії гравців, тобто задані простори X та Y, і для будь-яких $x \in X$ та $y \in Y$ визначено втрати *L(x, y)*.

Таким чином, доходимо наведеного нижче формального визначення гри. Гра G визначається трійкою:

$$G = (X, Y, L) \quad (6)$$

де X та Y – деякі простори; L – обмежена числова функція, визначена на прямому добутку X і Y.

Тоді точки $x \in X$ та $y \in Y$ будемо називати стратегіями першого та другого гравців, а функцію L називати функцією втрат.

Ігри, в яких кожен гравець описується кінцевою кількістю стратегій, зручно задавати як матриці втрат. Нехай $G = (X, Y, L)$ – кінцева гра, у якій $X = \{x_1, ..., x_m\}$, $Y = \{y_1, ..., y_n\}$.

Тоді матриця порядку $(m \times n)$:

$$Q = \|q_{ij}\| = \begin{Vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & \dots & q_{mn} \end{Vmatrix} \quad (7)$$

у якій $q_{ij} = L(x_i, y_i)$ називається матрицею гри G.

Для того, щоб опис гри був закінченим, необхідно вказати цілі, якими керуються гравці у виборі своїх стратегій. Ці цілі прості. Перший гравець прагне зробити найбільший виграш, тобто максимізувати функцію *L(x, y)*, а другий гравець прагне зробити свій програш найменшим, тобто мінімізувати функцію *L(x, y)*.

Цілі гравців виявляються прямо протилежними. Специфічною складністю тут є те, що жоден із гравців не контролює повністю значення *L(x, y)*, оскільки перший гравець розпоряджається лише значенням *(x)*, а другий – лише значенням *(y)*.

Подолання цієї проблеми, тобто визначення найбільш раціонального способу ведення гри кожним із гравців і є сутністю ігор.

Іншим варіантом гри є гра з ненульовою сумою. У такій грі виграші одних гравців виходять не тільки за рахунок виграшів інших гравців, але й за рахунок будь-яких платежів, що надходять ззовні. Ці платежі розглядаються як програші деякого додаткового фіктивного гравця, що дає змогу звести гру *(n)* осіб із ненульовою сумою до гри *(n + 1)* осіб із нульовою сумою. Теорія ігор з *(n)* учасникам для *(n > 2)* є складним завданням, тому розглянемо ігри двох осіб із нульовою сумою.

На основі введених понять розглянемо гру, що складається з чотирьох ходів. Перший хід – власний. Перший гравець обирає одне із двох цілих чисел 1 або 2. Другий хід – випадковий. Кидається монета і, якщо випадає орел, вибір першого гравця повідомляється другому гравцю. Третій хід – власний. Другий гравець обирає одне із двох цілих чисел 3 або 4. Четвертий хід – випадковий. Вибирається випадковим чином із ймовірністю 0,4; 0,2; 0,4 одне із трьох цілих чисел 1, 2 або 3.

Результат гри: числа, вибрані на першому, третьому та четвертому ходах, складаються, і отримана сума сплачується другим гравцем першому гравцю, якщо вона парна, і першим гравцем другому гравцю, якщо вона непарна.

За попереднього аналізу гру зручно представити у вигляді дерева, у якому випадки, що виникають у процесі гри, зображуються вершинами, а ходи – гілками, що з'єднують одну вершину з іншою. Дерево гри наведено на рис. 1.

Вершини, що відповідають власним ходам першого та другого гравців, позначені відповідно 1 і 11. Вершини, що відповідають випадковим ходам, позначені 0. Кінцеві вершини, що визначають окремі варіанти гри, позначені цифрами, що означають програші другого гравця.

У різних вершинах, що відповідають власним ходам, гравець має певний вид інформації про попередні ходи. Якщо в кількох вершинах гравцю доступна та сама інформація, то ці вершини зручно об'єднати. Шляхом такого об'єднання виходять групи вершин S_i, які називаються класами інформації. У цьому прикладі є чотири класи інформації, зміст яких такий:

1) S_1 – ходів ще не було, перший гравець повинен зробити перший хід;

2) S_2 – перший гравець вибрав 1;

3) S_3 – перший гравець вибрав 2;

4) S_4 – невідомо, що вибрав перший гравець.

За потрапляння на вершину, що знаходиться в класі, другий гравець не має інформації про вибір першого гравця, тобто це гра з неповною інформацією. Якщо в клас інформації входить лише одна вершина, то гравець, який потрапляє на цю вершину, повністю обізнаний з усіма попередніми ходами, тобто має повну інформацію про гру.

Розглянемо простір стратегій гравців. Простір стратегій першого гравця, що складається всього

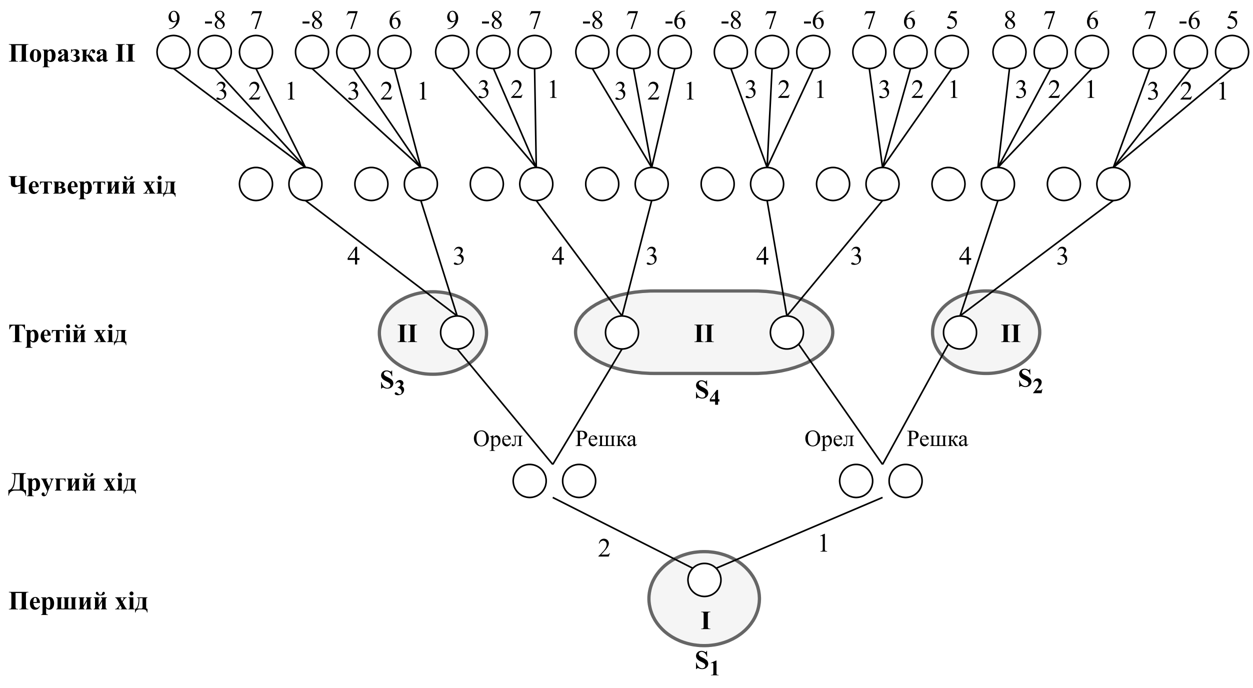

Рис. 1. Дерево гри

з двох елементів, яким відповідає вибір 1 або 2, наведено в таблиці 1, а). Стратегія другого гравця повинна вказувати його хід за будь-якого можливого варіанта гри. Варіант гри визначається класом інформації гравця. Для другого гравця є три класи інформації: S_2, S_3 та S_4. Отже, стратегія другого гравця полягає у вказівці, яке з двох чисел – 3 чи 4 – він вибирає в кожному класі інформації.

Таблиця 1

x_1	x_2
(1)	(2)

а)

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
(333)	(334)	(343)	(344)	(433)	(434)	(443)	(444)

б)

h	(O,1)	(O,2)	(O,3)	(P,1)	(P,2)	(P,3)
p(h)	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2

в)

Стратегія в класі інформації (4, 3, 3) означає, що другий гравець вибирає 4 в класі інформації S_2 та S_3 в класах інформації S_3 та S_4. Простір стратегій другого гравця наведено у таблиці 1, б). Простір стратегій третього гравця представлено у таблиці 1, в).

Висновки. Формалізований опис поведінки гравців у тій чи іншій ігровій ситуації є ключовим завданням побудови загального рішення гри. В ідеальному випадку таке рішення представляє собою набір рекомендацій для кожного гравця, проте так буває далеко не завжди. У таких випадках рішення може бути представлене у вигляді набору результатів гри. Тобто рішення є набором раціональних, з точки зору поведінки гравців, ситуацій і тому повинні реалізовуватися лише ті ситуації, що належать рішенню. Водночас, якщо використання прямих стратегій не дає можливості знайти рішення гри, можуть складатися також і змішані стратегії.

Сьогодні не існує єдиної концепції побудови рішень для різних класів ігор. Перш за все це пов'язано із застосуванням формального опису гри, який є лише спрощеною моделлю складних реальних процесів, що відбуваються в ході гри: обміну інформацією, можливих договорів між гравцями, самостійних дій гравців щодо збільшення своєї поінформованості. Не можна виключати й можливості ірраціональної поведінки гравців, яка натепер практично не піддається формалізації. Якщо спробувати включити всі подібні деталі до опису гри, вона може стати занадто складною для конструктивного аналізу.

Інша складність полягає в тому, що саме розуміння поняття раціональної поведінки у різних людей може відрізнятися. Те, що видається раціональним одному, може здатися нераціональним іншому, і сучасна наука часто не знає об'єктивних причин, що лежать за цими відмінностями в оцінці.

У зв'язку з цим теорія ігор не завжди може точно передбачити поведінку гравців у реальній ігровій ситуації або дати однозначну рекомендацію щодо ухвалення рішення. Це загальна проблема всіх формальних, модельних досліджень, і не тільки в теорії ігор. Проте цінність модельних досліджень ігрових ситуацій безперечна, оскільки вони дають можливість, досліджуючи досить прості моделі, з'ясовувати основні закономірності, які лежать в основі раціональної поведінки у ситуаціях, що моделюються.

Список літератури:

1. Информационная технология разработки специализированной СППР оперативного управления производством полупроводниковых изделий / В.В. Завгородний, И.В. Шевченко, В.Ф. Шостак, С.С. Щербак (2013). *Вісник Академії митної служби України. Сер.: Технічні науки.* 2013. № 1. С. 69–76. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vamsutn_2013_1_13

2. Devising a Method To Identify an Incoming Object Based on the Combination of Unified Information Spaces / V. Mukhin et al. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2021. № 3(2). 111 p. DOI: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229568

3. Дацко М.А. Моделювання складних об'єктів. Москва : Максімас, 2015. 111 с.

4. Method of searching for information objects in unified information space. / A. Dodonov et al. *System research and information technologies.* 2021. № 1. Pp. 34–46. DOI: https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2021.1.03

5. Отрох С.І., Завгородній В.В., Завгородня Г.А. Аналіз взаємозв'язку збитку з ризиком при виникненні техногенних аварій в концепції прийнятного ризику. *Телекомунікаційні та інформаційні технології.* 2018. № 2. С. 117–123. DOI: https://doi.org/10.32703/2617-9040-2018-32-2-87-95

6. Диксит А., Нейлбафф Б. Теория игр: искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни. Москва : Манн, Иванов и Фербер, 2014. 464 с.

7. Якутенко И. Математика обмана. Москва : Вокруг света. № 11. 2014. С. 170-179.

8. Мейкісон Л.К. Моделювання – це легко. Москва : 3DNs, 2013. 313 с.

9. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение : монография. Москва : Наука, 1970. 708 с.

10. Alessandro Bonatti. Game Theory for Strategic Advantage. Spring 2015. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

11. Mihai Manea. Game Theory. Spring 2016. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

12. Erich Prisner. Game Theory Through Examples. 1sted., Mathematical Association of America, 2014. JSTOR, www.jstor.org/stable/10.4169/j.ctt6wpwgj.

13. Muhamet Yildiz. Economic Applications of Game Theory. Fall 2012. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

Zavgorodnii V.V., Zavgorodnya A.A., Drobotovich K.E., Tenigin O.V., Shmatko M.M.

MATHEMATICAL MODELING IN FORMAL RESEARCH METHODS

The research of methods of making managerial decisions in the conditions of the conflict based on use of methods of the theory of games is considered in the work. For such situations, the quality and quantity of available information about the object of management and the external environment determine how the decision-making task can be formalized and solved.

The purpose of building such a formalized model is to develop recommendations for reasonable behavior of players in game situations, ie to determine the optimal strategy of each player.

The mathematical analysis of game situations is carried out in the work and their description in the form of mathematical model is formalized.

The formalized scheme of the game situation in the form of its mathematical model is given, and also the game situation is formulated, ie it is schematized for reflection of strategies of participants and numerical results to which each combination of strategies of the participating parties leads.

A formalized description of the behavior of players in a given game situation is a key task in building the overall solution of the game. Ideally, this solution is a set of recommendations for each player, but this is not always the case. In such cases, the solution can be presented in the form of a set of game results. That is, the decision is a set of rational, in terms of player behavior, situations and therefore should be implemented only those situations that belong to the decision. At the same time, if the use of direct strategies does not allow to find solutions to the game, mixed strategies can also be developed.

The value of model studies of game situations is indisputable, because they provide an opportunity, exploring fairly simple models, to determine the basic patterns that underlie rational behavior in simulated situations.

Key words: *game theory, formalized model, game strategy, game tree, decision making.*