

## РАДІОТЕХНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

УДК 519.6:004.67:621.37:621.39

**Абакумова А.О.**

Національний авіаційний університет

**Сліпухіна О.О.**

Національний авіаційний університет

**Одарченко Р.С.**

Національний авіаційний університет

**Яновський Ф.Й.**

Національний авіаційний університет

**Шутко В.М.**

Національний авіаційний університет

### ПОЛІНОМІАЛЬНИЙ СПЛАЙН ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАВДАНЬ У ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЯХ ТА РАДІОТЕХНІЦІ

У статті пропонується представлення сплайнів із розрідженою структурою базисних матриць. Завдяки цьому породжується висока швидкість під час обчислення великих масивів даних. Водночас розроблено форму побудови поліноміальних сплайнів, що сприяє ефективній роботі під час програмування. Проведено моделювання за допомогою розробленої форми побудови сплайну. Було знайдено аналітичну функцію поліноміального сплайну та доведено ефективні властивості фільтрації сплайнів.

**Ключові слова:** сплайн, поліном, матриця, фільтрація, радіолокація, стільникова мережа.

**Постановка проблеми.** Сьогодні в телекомунікаціях та радіотехніці існує багато задач з оброблення сигналів та зображень. Значну частину радіотехнічних сигналів обробляють у цифровому вигляді. Апроксимація, фільтрація, стиснення даних, статистичне вирівнювання рядів, виявлення та вимірювання сигналів – усе це загальні завдання, котрі постають під час оброблення багатовимірних сигналів та великих масивів даних у реальному часі.

Наприклад, виявлення такої природної перешкоди, як блискавка, в радіолокації зводиться до проблеми прийняття рішення про наявність чи відсутність корисного сигналу (цілі) в довільному об'ємі зони дії локатора. Покращення якості надання послуг стільниковим оператором зводиться до проблеми виявлення залежності між параметрами стільникової мережі.

За таких умов постає потреба у використанні математичного апарату, котрий дозволить вирішити ці завдання.

Сплайн – це функція, що складається з фрагментів однакового виду, котрі зшиті між собою.

Це одна з ключових ознак сплайнів, що відрізняє його від інших функцій. Крім того, коли йдеться про сплайни, то обов'язково має виконуватись умова [1], котра забезпечує неперервність та диференційність (природна гладкість) у точці склейки (рис. 1).

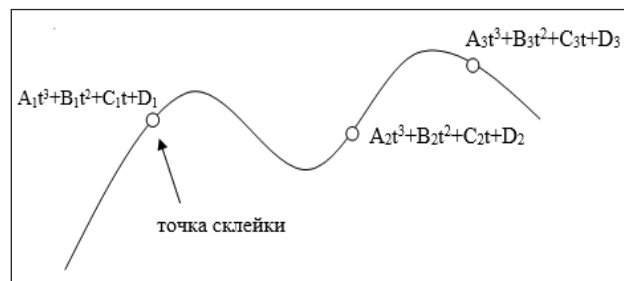


Рис. 1. Поліноміальний сплайн

Основною перевагою сплайнів є простота розрахунків та аналізу. Водночас цей клас математичного апарату вважається найкращим серед лінійних апаратів наближення.

Властивості сплайнів:

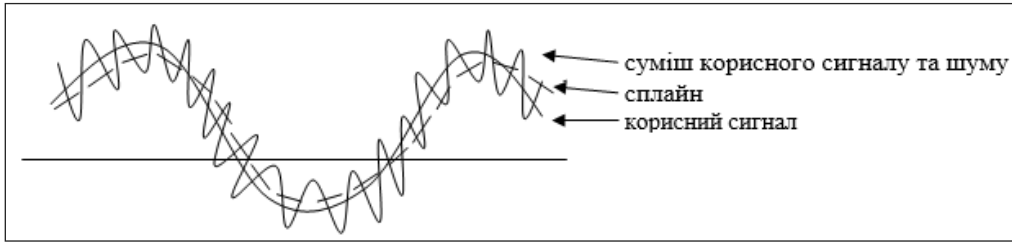


Рис. 2. Результат фільтрації

1) інтерполяція – відновлення функціональної залежності між окремими точками;

2) точність та швидкодія. Сплайни мають потужні обчислювальні властивості. Для розрахунку потребується набагато менше обчислювальних операцій, витрат, ніж для побудови поліномів та відрізків низки Фур’є під час оброблення однакових масивів даних. При цьому сплайни мають високу точність інтерполяції неперервних та гладких функцій;

3) фільтрація. У кожному реальному завданні телекомунікацій та радіотехніці на вході приймача спостерігається суміш корисного (детермінованого) сигналу та завад (шуму). Відфільтрувати повністю шуми неможливо, адже завжди щось залишається. Проте сплайни дозволяють відфільтрувати сигнал із малою середньоквадратичною похибкою (рис. 2). При цьому динамічна похибка апроксимації корисного складника теж буде малою;

4) аналітичність. На кожному інтервалі склейки сплайни мають конкретний аналітичний вираз, а весь інтервал записується як система аналітичних виразів.

Зважаючи на вищевикладені переваги сплайнів, є доцільним їх використання для вирішення окреслених проблем.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Останніми роками багатьма вченими розроблено та проаналізовано різновиди сплайнів, що знайшли застосування для вирішення широкого спектра прикладних задач [2–4]. Однак існує проблема у представленні такої форми побудови сплайнів, щоб забезпечувала ефективну роботу під час програмування.

Водночас численні дослідження багатьох авторів указують на згладжувальні властивості сплайнів, котрі забезпечують мінімальні значення середньоквадратичних похибок [5–7]. Проте ці сплайни не гарантують формальну, теоретично доведену швидкодію під час оброблення великих масивів даних.

**Постановка завдання.** У зв’язку з вищевикладеним постає завдання у розробленні універ-

сальної форми побудови сплайнів для прикладних застосувань у телекомунікаціях та радіотехніці, зокрема для ефективної роботи під час програмування. Водночас виникає доцільне завдання забезпечити високу швидкодію роботи сплайнів для вирішення у реальному часі питань виявлення та вимірювання сигналів, визначення середньостатистичного прогнозування параметрів телекомунікаційної мережі та залежності між ними, забезпечення статистичного вирівнювання часових рядів та прийняття рішення про виявлення цілі в довільному об’ємі зони дії локатора.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Побудуємо сплайн за методом найменших квадратів (МНК) (рис. 3).

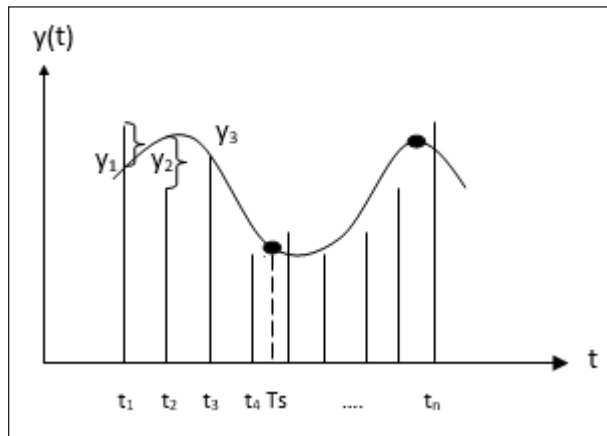


Рис. 3. Поліноміальний сплайн за методом найменших квадратів

Запишемо такий функціонал для сплайну:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [A_1 t_i^3 + B_1 t_i^2 + C_1 t_i + D_1 - y_{1i}]^2 + \sum_{i=N+1}^{2N} [A_2 t_i^3 + B_2 t_i^2 + C_2 t_i + D_2 - y_{2i}]^2 + \lambda_0 [A_1 T_5^3 + B_1 T_5^2 + C_1 T_5 + D_1 - A_2 T_5^3 - B_2 T_5^2 - C_2 T_5 - D_2] + \lambda_1 [3A_1 T_5^2 + 2B_1 T_5 + C_1 - 3A_2 T_5^2 - 2B_2 T_5 - C_2] = \min \quad (1)$$

де  $A_1, B_1, C_1, D_1$  – коефіцієнт кубічного поліному для 1-го інтервалу склейки;

$A_2, B_2, C_2, D_2$  – коефіцієнт кубічного поліному для 2-го інтервалу склейки;

$y_{1i}, y_{2i}$  – вхідні відліки кожного інтервалу склейки;

$t_i$  – відліки часу на кожному інтервалі спостереження;

$T_S$  – час склейки;  
 $\lambda_0, \lambda_1$  – сталі Лагранжа.

Сума квадратів відхилень апроксимувальних поліномів від функцій, що апроксимуються, має бути мінімальною. Це і є умова МНК.

Після умов мінімізації середньоквадратичних похибок першого та другого апроксимувальних поліномів на кожному з інтервалів сплайну накладаються ще умови неперервності першого та другого поліному у точці склейки ( $\lambda_0$ ) та умова неперервності першої похідної першого та другого поліному у точці склейки ( $\lambda_1$ ). Умова неперервності першої похідної це існування дотичної у точці склейки.

Отже, потрібно знайти такі  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ , які задовольняють умову (1). Для цього знайдемо часткові похідні функціоналу  $\Phi$  за кожним невідомим параметром і прирівняємо їх до 0.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial A_1} = 2 \sum_{i=1}^N [A_1 t_i^3 + B_1 t_i^2 + C_1 t_i + D_1 - y_{1i}] * t_i^3 + \lambda_0 T_S^3 + 3 \lambda_1 T_S^2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial B_1} = 2 \sum_{i=1}^N [A_1 t_i^3 + B_1 t_i^2 + C_1 t_i + D_1 - y_{1i}] * t_i^2 + \lambda_0 T_S^2 + 2 \lambda_1 T_S^1 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_1} = 2 \sum_{i=1}^N [A_1 t_i^3 + B_1 t_i^2 + C_1 t_i + D_1 - y_{1i}] * t_i^1 + \lambda_0 T_S^1 + 3 \lambda_1 T_S^0 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial D_1} = 2 \sum_{i=1}^N [A_1 t_i^3 + B_1 t_i^2 + C_1 t_i + D_1 - y_{1i}] * t_i^0 + \lambda_0 T_S^0 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial A_2} = 2 \sum_{i=N+1}^{2N} [A_2 t_i^3 + B_2 t_i^2 + C_2 t_i + D_2 - y_{2i}] * t_i^3 - \lambda_0 T_S^3 - 3 \lambda_1 T_S^2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial B_2} = 2 \sum_{i=N+1}^{2N} [A_2 t_i^3 + B_2 t_i^2 + C_2 t_i + D_2 - y_{2i}] * t_i^2 - \lambda_0 T_S^2 - 2 \lambda_1 T_S^1 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} = 2 \sum_{i=N+1}^{2N} [A_2 t_i^3 + B_2 t_i^2 + C_2 t_i + D_2 - y_{2i}] * t_i^1 - \lambda_0 T_S^1 - 3 \lambda_1 T_S^0 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial D_2} = 2 \sum_{i=N+1}^{2N} [A_2 t_i^3 + B_2 t_i^2 + C_2 t_i + D_2 - y_{2i}] * t_i^0 - \lambda_0 T_S^0 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_0} = A_1 T_S^3 + B_1 T_S^2 + C_1 T_S + D_1 - A_2 T_S^3 - B_2 T_S^2 - C_2 T_S - D_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = 3 A_1 T_S^2 + 2 B_1 T_S + C_1 - 3 A_2 T_S^2 - 2 B_2 T_S - C_2 = 0 \\ 2 A_1 \sum_{i=1}^N t_i^6 + 2 B_1 \sum_{i=1}^N t_i^5 + 2 C_1 \sum_{i=1}^N t_i^4 + 2 D_1 \sum_{i=1}^N t_i^3 + \lambda_0 T_S^3 + 3 \lambda_1 T_S^2 = 2 \sum y_{1i} t_i^3 \\ 2 A_1 \sum_{i=1}^N t_i^5 + 2 B_1 \sum_{i=1}^N t_i^4 + 2 C_1 \sum_{i=1}^N t_i^3 + 2 D_1 \sum_{i=1}^N t_i^2 + \lambda_0 T_S^2 + 2 \lambda_1 T_S^1 = 2 \sum y_{1i} t_i^2 \\ 2 A_1 \sum_{i=1}^N t_i^4 + 2 B_1 \sum_{i=1}^N t_i^3 + 2 C_1 \sum_{i=1}^N t_i^2 + 2 D_1 \sum_{i=1}^N t_i^1 + \lambda_0 T_S^1 + \lambda_1 T_S^0 = 2 \sum y_{1i} t_i^1 \\ 2 A_1 \sum_{i=1}^N t_i^3 + 2 B_1 \sum_{i=1}^N t_i^2 + 2 C_1 \sum_{i=1}^N t_i^1 + 2 D_1 \sum_{i=1}^N t_i^0 + \lambda_0 T_S^0 = 2 \sum y_{1i} t_i^0 \end{cases} \quad (2)$$

Перепишемо (3) у матричному вигляді:

$$M * X = Y, \quad (4)$$

де

$$M = \begin{bmatrix} 2 \sum_{i=1}^N t_i^6 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^5 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^4 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_S^3 & 3T_S^2 \\ 2 \sum_{i=1}^N t_i^5 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^4 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^3 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_S^2 & 2T_S^1 \\ 2 \sum_{i=1}^N t_i^4 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^3 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^2 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_S^1 & T_S^0 \\ 2 \sum_{i=1}^N t_i^3 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^2 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^1 & 2 \sum_{i=1}^N t_i^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_S^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^6 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^5 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^4 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^3 & -T_S^3 & -3T_S^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^5 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^4 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^3 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^2 & -T_S^2 & -2T_S^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^4 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^3 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^2 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^1 & -T_S^1 & -T_S^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^3 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^2 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^1 & 2 \sum_{i=N+1}^{2N} t_i^0 & -T_S^0 & 0 \\ T_S^3 & T_S^2 & T_S^1 & 1 & -T_S^3 & -T_S^2 & -T_S^1 & -1 & 0 & 0 \\ 3T_S^2 & 2T_S^1 & 1 & 0 & -2T_S^2 & -2T_S^1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \sum y_{1i} t_i^3 \\ 2 \sum y_{1i} t_i^2 \\ 2 \sum y_{1i} t_i^1 \\ 2 \sum y_{1i} t_i^0 \\ 2 \sum y_{2i} t_i^3 \\ 2 \sum y_{2i} t_i^2 \\ 2 \sum y_{2i} t_i^1 \\ 2 \sum y_{2i} t_i^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Із виразу (4) випливає, що:

$$X = M^{-1} * Y.$$

Зазначимо, що матриці  $M$  та  $M^{-1}$  не залежать від вхідних відліків  $y_i$ , тому вони можуть бути розраховані заздалегідь і прошиті у процесор певного пристрою.

Під час оброблення великих обсягів даних структура матриці  $M$  буде такою (рис. 4):

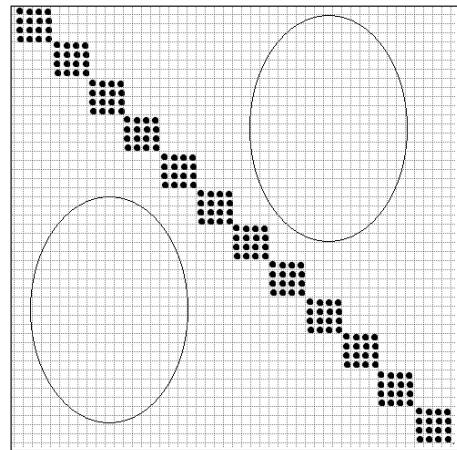


Рис. 4. Розріджена структура базисних матриць

Зазначимо, що матриця дуже розріджена з невеликим додаванням елементів по краям і що в ній багато нулів. Саме така структура забезпечує високу швидкість під час оброблення великих обсягів даних.

На основі вищевикладеного проведемо моделювання на такому прикладі.

```
l=0:127;
u=cos(2*pi*1.0*I/128)'; % Корисний (детермінований) сигнал
y3=y+0.2*randn(128,1); % Суміш корисного сигналу та адитивного гаусівського шуму
N=128;
t=1:N;
t1=1:64;
t2=65:128;
TS=64.5; % Час склейки
y1=y(1:64)';
```

```

y2=y(65:128)';
M=[2*sum(t1.^6),2*sum(t1.^5),2*sum(t1.^4),2*s
um(t1.^3),0,0,0,0,TS^3,3*TS^2;
 2*sum(t1.^5),2*sum(t1.^4),2*sum(t1.^3),2*sum(
t1.^2),0,0,0,0,TS^2,2*TS^1;
 2*sum(t1.^4),2*sum(t1.^3),2*sum(t1.^2),2*sum(
t1.^1),0,0,0,0,TS^1,TS^0;
 2*sum(t1.^3),2*sum(t1.^2),2*sum(t1.^1),2*sum(
t1.^0),0,0,0,0,TS^0,0;
 0,0,0,0,2*sum(t2.^6),2*sum(t2.^5),2*sum(t2.^4),
2*sum(t2.^3),-TS^3,-3*TS^2;
 0,0,0,0,2*sum(t2.^5),2*sum(t2.^4),2*sum(t2.^3),
2*sum(t2.^2),-TS^2,-2*TS^1;
 0,0,0,0,2*sum(t2.^4),2*sum(t2.^3),2*sum(t2.^2),
2*sum(t2.^1),-TS^1,-TS^0;
 0,0,0,0,2*sum(t2.^3),2*sum(t2.^2),2*sum(t2.^1),
2*sum(t2.^0),-TS^0,0;
 TS^3,TS^2,TS^1,1,-TS^3,-TS^2,-TS^1,-1,0,0;
 3*TS^2,2*TS^1,1,0,-3*TS^2,-2*TS^1,-1,0,0,0];
Y=[2*sum(y1.*t1.^3);
 2*sum(y1.*t1.^2);
 2*sum(y1.*t1.^1);
 2*sum(y1.*t1.^0);
 2*sum(y2.*t2.^3);
 2*sum(y2.*t2.^2);
 2*sum(y2.*t2.^1);
 2*sum(y2.*t2.^0);
 0;
 0];
IM=M^(-1);
X=IM*Y;
A1=X(1)
B1=X(2)
C1=X(3)
D1=X(4)
A2=X(5)
B2=X(6)
C2=X(7)
D2=X(8)

```

```

SP(1:64)=X(1)*t1.^3+X(2)*t1.^2+X(3)*t1.^1+X
(4)*t1.^0;
SP(65:128)=X(5)*t2.^3+X(6)*t2.^2+X(7)*t2.^1+
X(8)*t2.^0;
plot(t,y,t,SP,t,y3),grid

```

Результат моделювання зображено на рис. 5, де синім кольором показано корисний сигнал (детермінована основа), помаранчевим – суміш корисного сигналу та адитивного гаусівського шуму, а червоним – сплайн. Слід зауважити, що на вхід приймача подається саме суміш корисного сигналу із шумом, із яким працює сплайн.

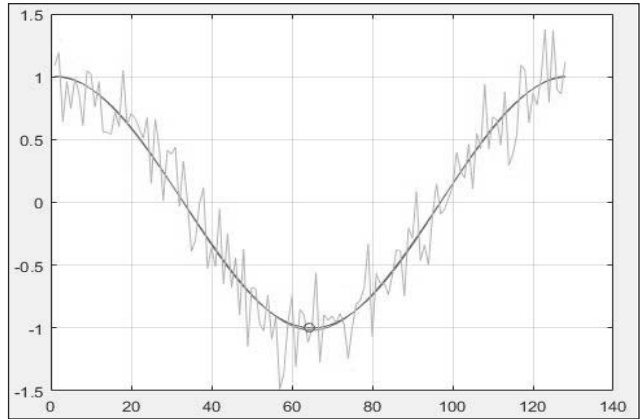


Рис. 5. Результат моделювання

В кінцевому рахунку отримано коефіцієнти кубічних поліномів:

- A1 = 1.5769e-05;
- B1 = -0.0016;
- C1 = 0.0045;
- D1 = 1.0006;
- A2 = -1.5686e-05;
- B2 = 0.0046;
- C2 = -0.3933;
- D2 = 9.6087,

що дає можливість відповідно до цього записати аналітичну функцію поліноміального сплайну:

$$SP(t) = \begin{cases} A_1 t^3 + B_1 t^2 + C_1 t + D_1, & t \in [1:64] \\ A_2 t^3 + B_2 t^2 + C_2 t + D_2, & t \in [65:128] \end{cases}$$

Було підраховано середньоквадратичне відхилення поліноміального сплайну від корисного сигналу  $ans = 0.0082$ , що майже у 30 разів менше, ніж середньоквадратичне відхилення зашумленого сигналу від корисного  $ans = 0.2313$ , що вказує на ефективне статистичне вирівнювання зашумленого сигналу.

Розглянемо випадок, коли використовується для моделювання більш складний сигнал (рис. 6).

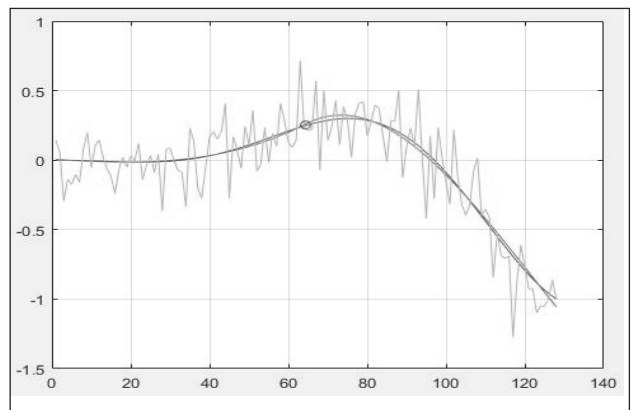


Рис. 6. Результат моделювання другого випадку

У результаті фільтрування у цьому разі середньоквадратична похибка сплайну становить 0.0161, а середньоквадратична похибка зашумленого сигналу – 0.2032, що у понад 12 разів вища.

**Висновки.** У статті пропонується представлення поліноміальних сплайнів із розрідженою структурою базисних матриць (далі – РСБМ). У цьому разі РСБМ забезпечує високу швидкість під час обчислення сплайнів, що важливо для роботи в реальному часі під час оброблення великих масивів даних.

Крім того, представлено універсальну форму побудови сплайнів для прикладних застосувань у телекомунікаціях та радіотехніці, насамперед для ефективної роботи під час програмування. Представлено чітку програмну реалізацію сплайнів у середовищі програмування MATLAB.

У підсумку було проведено моделювання за допомогою розробленої форми побудови сплайну. У результаті це дозволило знайти аналітичну функцію поліноміального сплайну та довести ефективні властивості фільтрації та згладжування сплайнів.

#### Список літератури:

1. Малачівський П.С., Скопечкий В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення / за ред. І.В. Сергієнко; НАН України, Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова, Центр мат. моделювання Ін-ту приклад. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача. Київ: Наук. думка, 2013.
2. Brumback V.A., Rice J. Smoothing spline models for the analysis of nested and crossed samples of curves. *Journal of the American Statistical Association*. V. 93, 1998.
3. Ramsay T.O. Spline smoothing over difficult regions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*. V. 64, 2002.
4. Гармаш, В.Н., Малакшинов Н.П., Пузанков В.Ф. Численные методы решения некоторых обратных задач восстановления характеристик излучающих систем по измеренным полям в дальней и ближней зонах. Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. Москва: Высш. шк., Вып. 5, 1983.
5. I.D. Carry and M. Durban. Flexible smoothing with P-splines: a unified approach. *Statistical Modelling*, 2002.
6. Силаев Д.А., Амилющенко А.В., Лукьянов А.И., Коротаев Д.О. Полулокальные сглаживающие сплайны класса  $S_1$ . Труды семинара имени И.Г. Петровского. Москва, Вып. 26, 2007.
7. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее применение. Москва, «Мир», 1972.

#### ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ СПЛАЙН ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ В ТЕЛЕКОМУНИКАЦИЯХ И РАДИОТЕХНИКЕ

*В статье предлагается представление сплайнов с разреженной структурой базисных матриц. Благодаря этому порождается высокое быстродействие при исчислении больших массивов данных. Вместе с тем, разработана форма построения полиномиальных сплайнов, что способствует эффективной работе во время программирования. В то же время проведено моделирование с помощью разработанной формы построения сплайна. В итоге было найдено аналитическую функцию полиномиального сплайна и доказано эффективные свойства фильтрации сплайнов.*

**Ключевые слова:** сплайн, полином, матрица, фильтрация, радиолокация, сотовая сеть.

#### POLYNOMIAL SPLINE FOR SOLVING APPLIED PROBLEMS IN TELECOMMUNICATIONS AND RADIO ENGINEERING

*The article proposes the representation of splines with a rarefied structure of basic matrices. This generates high performance in computing large amounts of data. However, a form of constructing polynomial splines has been developed, which contributes to efficient work during programming. At the same time, the simulation was carried out using the developed form of the spline construction. In the end, the analytic function of the polynomial spline was found and the effective properties of the spline filtration have been proved.*

**Key words:** spline, polynomial, matrix, filtration, radar, cellular network.